1983

1980

DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

M A T H E M A T I Q U E S

2ème épreuve commune aux options M et P

Durée : 4 heures

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants qui seront notés chacun sur 10.

PREMIER PROBLEME

Note - On peut résoudre les questions " 2-3 - applications " sans avoir résolu la première question.

n est un entier naturel au moins égal à 2, et E un espace vectoriel réel de dimension n. $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes sur E.

On se propose de déterminer les endomorphismes g de E qui vérifient :

(1) $g^2 = gog$, $g^2 \neq 0$, $g^3 = g^2 og = 0$

où 0 est l'endomorphisme nul de E.

Première question -

Soit f, $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \neq 0$, $f^2 = 0$

montrer que :

a) f n'est pas diagonisable.

b) il existe une base $\mathcal{B}$ de E et deux entiers naturels r,s vérifiant $r + s = n$, $r \leqslant s$, tels que la matrice $A_{s,r}$ associée sur $\mathcal{B}$ à f est :

(2) $$A_{s,r} = \left[\begin{array}{c|c} 0' & I_r \\ \hline 0_s & 0'' \end{array}\right]$$

où I_r est la matrice unité d'ordre r
0_s est la matrice carrée nulle d'ordre s
0' et 0'' sont deux matrices rectangulaires nulles dont on précisera les dimensions.

.../...

Deuxième question -

As,r étant la matrice obtenue dans la première question, on note $\mathcal{U}_{s,r}$ l'ensemble des matrices B telles que B As,r = As,r B = 0.

a) préciser les dimensions de B. Montrer que $\mathcal{U}_{s,r}$ a une struture d'algèbre.

b) en écrivant :

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \hline Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array}\right]$$ où X_1, X_3 , Z_1 , Z_3 sont des matrices carrées

d'ordre r, Y_2 une matrice carrée d'ordre s-r , X_2, Y_1, Y_3 , Z_2 des matrices rectangulaires dont on précisera les dimensions

Déterminer $\mathcal{U}_{s,r}$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur le couple (n,r) pour que l'on ait :

(3) $\quad (B \in \mathcal{U}_{s,r}) \Longrightarrow (B^2 = 0)$

Troisième question -

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 \neq 0$ $\quad g^3 = 0$.

a) montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et un couple d'entiers naturels (r,s) vérifiant r+s = n , $r \leqslant s$ tel que :

α) la matrice de g^2 sur $\mathcal{B}$ est As,r

β) la matrice B de g sur $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{U}_{s,r}$

b) en déduire que l'on a nécessairement $r < s$

c) en prenant B sous forme de blocs comme au § 2-b, calculer B^2 et en déduire des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les blocs $X_1 \ldots Z_3$ pour que B^2 = As,r et $B^3 = 0$.

Application -

dans cette question, n = 4 et $B = \begin{bmatrix} o & a & b & c \\ o & a' & b' & c' \\ o & a'' & b'' & c'' \\ o & o & o & o \end{bmatrix}$

Soit (Σ) le système traduisant les conditions liant les 9 paramètres a,b,....c" nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un couple (s,r) tel que B^2 = As,r et $B^3 = 0$.

a) montrer que (s,r) =(3,1)

b) expliciter(Σ), qui compte 9 relations.

c) déterminer les matrices B vérifiant B^2 = A 3,1 , B^3 = 0 avec a" = b' = 0.

d) quand on suppose (a",b') ≠ (0,0), (Σ) exige a' + b" = 0 et peut alors s'écrire, en éliminant b", comme suit :

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} (S) \\ (R) \end{array} \right.$$

où (S) est un système pouvant être considéré comme un système de 3 équations à 2 inconnues a et b, dépendant des paramètres a', b' etc... lesquels vérifient (R), composé de trois relations.

Etudier le rang de (S) et l'existence de ses solutions. En déduire la non existence de matrices B telles que :

B^2 = A 3,1 , $B^3 = 0$, (a", b') ≠ (0,0)

e) donner alors toutes les matrices B telles que B^2 = A 3,1 , $B^3 = 0$.

Indiquer comment on pourrait en déduire toutes les matrices C d'ordre 4, telles que $C^2 \neq 0$, $C^3 = 0$.

DEUXIEME PROBLEME

Note : La troisième question est indépendante des deux premières.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les courbes étudiées sont toutes dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(c) est une courbe rectifiable, orientée, où l'on a choisi un point origine des abcisses curvilignes s. La fonction $\overrightarrow{OM}$ de s est dérivable autant de fois que le nécessiteront les calculs ultérieurs. On notera que cela implique que, si (c) peut admettre des points de courbure nulle, elle ne peut en admettre de rayon de courbure nul.

.../...

On note : M un point de (c), d'abscisse curviligne s.

$\vec{T}$ le vecteur unité de la tangente orientée en M à (c)

$\vec{N} = \vec{k} \wedge \vec{T}$

$\varphi = (\vec{i}, \vec{T})$

R, quand il existe, le rayon de courbure en M de (c)

I, quand il existe, le centre de courbure en M de (c)

On rappelle que : $dx = \cos \varphi \, .ds$

$dy = \sin \varphi \, .ds$

$R = \frac{ds}{d\varphi}$

(c_1) est la courbe, ensemble des points M_1 tels que $\overrightarrow{MM_1} = u(\varphi)\,\vec{T}$

$u(\varphi)$ étant une fonction précisée ultérieurement, et M décrivant (c)

$\vec{T}_1$, $\vec{N}_1$, φ_1 , R_1 , I_1 ont la même signification pour (c_1) que

$\vec{T}$, $\vec{N}$, φ , R, I pour (c). Enfin, (c_1) est orientée dans le sens des s croissants.

Première question -

$u(\varphi) = a, \quad a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que si I existe, la normale en M_1 à (c_1) passe par I.

b) Calculer, en fonction de R, a, $\vec{T}$, $\vec{N}$, quand R existe $\frac{ds_1}{ds}$, $\vec{T}_1$, $\vec{N}_1$, où s_1 est l'abcisse curviligne de (M_1) sur (c_1).
Que deviennent les résultats lorsqu'en M la courbure à (c) est nulle ?

c) Calculer, en fonction de R et a, quand R existe, les lignes trigonométriques de $\omega = \varphi_1 - \varphi$.

d) Calculer la valeur éventuelle de R_1 en fonction
d'une part de R , dR , ds, a .
d'autre part de R, dR , $d\varphi$, a .

Deuxième question -

$u(\varphi) = a , \quad a \in \mathbb{R}_+^*$

a) Peut-on choisir (c) de telle sorte que I_1 = I pour tout point M de (c)?
Commentez le résultat.

b) Peut-on choisir (c) de telle sorte que I_1 est rejeté à l'infini pour tout point M de (c) ?
pour résoudre la question (b) on donnera successivement :

1) φ en fonction de R en choisissant $\lim_{R \to 0} \varphi(R) = 0$

2) R en fonction de φ

3) x et y en fonction de φ en choisissant x (o) = - a y (o) = 0
On construira l'arc de (c) correspondant à : $o < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ainsi que l'arc de(ϵ_1) décrit alors par M_1.
On construira un triplet (M, M_1 , I).

Troisième question -

On se propose de voir s'il existe des fonctions $u(\varphi)$ et des courbes (c) telles que, si M décrit (c) d'un mouvement uniforme, et si M_h, défini par : $\overrightarrow{MM_h} = h\,\overrightarrow{MM_1}$ pour $h \in \mathbb{R}^*$, décrit (c_h), alors, le mouvement de M h sur (c_h) est aussi uniforme, pour toute valeur de h.

a) traduire la condition imposée au couple((c), u (φ))par une relation équivalente liant u, $\frac{du}{d\varphi}$, R et h.

b) déterminer les couples (R (φ), u (φ))qui vérifient cette relation.

c) déterminer une des courbes (c) associées aux fonctions R (φ) obtenues au paragraphe 3-b, et l'identifier dans le cas où R n'est pas constant.

———